Liceo scientifico e opzione scienze applicate

7 Calcolare il valor medio della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & 1 \leq x \leq 3 \\ e^{x-3}+1 & 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

nell’intervallo [1; 6] e determinare il valore della x in cui la funzione assume il valore medio.

7 Per applicare il teorema della media dobbiamo prima verificare che $f(x)$ è continua in [1; 6]. I due tratti sono funzioni continue su $\mathbb{R}$ e in particolare sui rispettivi intervalli di definizione. Quindi dobbiamo verificare la continuità solo nel punto $x = 3$ di raccordo tra i due tratti.
Calcoliamo i limiti destro e sinistro in $x = 3$:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (x-1) = f(3); \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^3} (e^{x-3}+1) = f(3).$$

I due limiti coincidono, quindi f è continua in [1; 6].
Calcoliamo il valor medio della funzione $f(x)$:

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{6-1}\left[\int_1^3 (x-1)dx + \int_3^6 (e^{x-3}+1)dx\right] = \frac{1}{5}\left\{\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3 + [e^{x-3}+x]_3^6\right\} =$$

$$\frac{1}{5}\left[\left(\frac{9}{2}-3\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)+(e^3+6)-(e^0+3)\right] = \frac{e^3+4}{5}.$$

Cerchiamo la controimmagine di $\frac{e^3+4}{5} \simeq 4,82$.

Osserviamo che per $1 \leq x \leq 3$ è $0 \leq f(x) = x-1 \leq 2$, quindi la controimmagine di $\frac{e^3+4}{5}$ va cercata nell'intervallo]3; 6].

$$f(x) = \frac{e^3+4}{5} \;\rightarrow\; e^{x-3}+1 = \frac{e^3+4}{5} \;\rightarrow\; e^{x-3} = \frac{e^3-1}{5} \;\rightarrow\; x = 3+\ln\frac{e^3-1}{5} \simeq 4,34.$$