Liceo scientifico e opzione scienze applicate

2 Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 - 2x + 1 & \text{per } x < 2 \\ x^2 + (k-1)x - 1 & \text{per } x \geq 2 \end{cases},$$

determinare, se possibile, k in modo che la funzione $f(x)$ e la sua derivata siano continue in tutto l'insieme di definizione.

2 La funzione:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 - 2x + 1 & \text{se } x < 2 \\ x^2 + (k-1)x - 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

è continua e derivabile in $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$, perché definita nei due intervalli aperti da funzioni polinomiali.
Imponiamo la continuità in $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) \rightarrow 4k - 4 + 1 = 4 + 2(k-1) - 1 \rightarrow 2k = 4 \rightarrow k = 2.$$

La funzione, continua in $\mathbb{R}$, diventa:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x + 1 & \text{se } x < 2 \\ x^2 + x - 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}.$$

Per la derivabilità, possiamo subito dire che $f(x)$ è derivabile con derivata continua in $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$, e risulta:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 2 & \text{se } x < 2 \\ 2x + 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}.$$

Nel punto $x = 2$ si ha:

$$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} (4x - 2) = 6; \quad \lim_{x \to 2+} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} (2x + 1) = 5.$$

I limiti sono diversi, quindi la funzione $f(x)$ non è derivabile, con derivata continua, in $\mathbb{R}$.
Conclusione: non esiste un valore di k per il quale $f(x)$ soddisfa la proprietà richiesta, ossia essere derivabile in $\mathbb{R}$ con derivata continua.